DM n°6 : Corrigé

1) **(0,5 pt)**
$P_2 = \boxed{2X^2-1}$
$P_3 = 2X(2X^2-1) - X = \boxed{4X^3-3X}$
$P_4 = 2X(4X^3-3X) - (2X^2-1) = \boxed{8X^4-8X^2+1}$

2) **(3 pts)**
Montrons par récurrence double sur n que $\deg P_n = n$ et que le coefficient dominant de P_n est $\begin{cases} 2^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}$

- Avec $n=0$, on a $P_0 = 1$ donc $\deg P_0 = 0$ et le coefficient dominant est bien 1. Avec $n=1$, on a $P_1 = X$ donc $\deg P_1 = 1$ et le coeffiicent domiannt de P_1 est bien $2^{1-1} = 1$.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie aux rangs n et $n+1$. Montrons-la au rang $n+2$. Si $n=0$, on a $P_{0+2} = P_2 = 2X^2-1$ donc il est clair que $\deg P_2 = 2$ et que son coefficient dominant est $2^{2-1} = 2$. Si $n \geq 1$, par hypothèse de récurrence, on sait que :

$$P_n = 2^{n-1}X^n + Q \qquad \text{avec } \deg Q_n \leq n-1$$

$$P_{n+1} = 2^n X^{n+1} + R \qquad \text{avec } \deg R \leq n$$

Ainsi,

$$\begin{aligned} P_{n+2} &= 2XP_{n+1} - P_n \\ &= 2X(2^nX^{n+1}+R) - 2^{n-1}X^n - Q \\ &= 2^{n+1}X^{n+2} + 2XR - 2^{n-1}X^n - Q \end{aligned}$$

Comme $\deg(XR) = 1 + \deg R \leq n+1$, que $\deg(X^n) \leq n$ et que $\deg Q \leq n-1$, on en déduit que

$$\deg\left(2XR - 2^{n-1}X^n - Q\right) \leq n+1$$

Ainsi, $\deg P_{n+2} = n+2$ et le coefficient dominant de P_{n+2} est $2^{n+1} = 2^{(n+2)-1}$.

- Finalement, pour tout $n \in \mathbb{N}$, on a $\boxed{\deg P_n = n}$ et le coefficient dominant de P_n est $\boxed{\begin{cases} 2^{n-1} & \text{si } n \geq 1 \\ 1 & \text{si } n = 0 \end{cases}}$

3) **(1,5 pt)**
Montrons par récurrence double sur n que P_n a la même parité que n, ce qui revient à dire que $P_n(-X) = (-1)^n P_n(X)$

- Avec $n=0$, n est pair et $P_0 = 1$ est bien pair. Avec $n=1$, n est impair et $P_1 = X$ est bien impair.
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie aux rangs n et $n+1$. Montrons qu'il en est de même au rang $n+2$. On sait que

$$\begin{aligned} P_{n+2}(-X) &= 2(-X)P_{n+1}(-X) - P_n(-X) \\ &= 2(-X)(-1)^{n+1}P_{n+1}(X) - (-1)^nP_n(X) \qquad \text{par hypothèse de récurrence} \\ &= (-1)^{n+2}\left[2XP_{n+1}(X) - P_n(X)\right] \qquad \text{car } (-1)^{n+2} = (-1)^n \end{aligned}$$

4) **(1,5 pt)**
Montrons cette relation par récurrence double sur n.

- (... on vérifie la relation avec $n=0$ et $n=1$ ...)
- Soit $n \in \mathbb{N}$. On suppose la propriété vraie aux rangs n et $n+1$. Montrons qu'il en est de même au rang $n+2$. Comme $P_{n+2}(X) = 2XP_{n+1}(X) - P_n(X)$, on a pour tout $z \in \mathbb{C}^*$:

$$\begin{aligned} P_{n+2}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) &= 2\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right)P_{n+1}\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) - P_n\left(\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right)\right) \\ &= \left(z+\frac{1}{z}\right) \times \frac{1}{2}\left(z^{n+1}+\frac{1}{z^{n+1}}\right) - \frac{1}{2}\left(z^n+\frac{1}{z^n}\right) \qquad \text{par H.R.} \\ &= \frac{1}{2}\left(z^{n+2} + \frac{1}{z^n} + z^n + \frac{1}{z^{n+2}} - z^n - \frac{1}{z^n}\right) \\ &= \frac{1}{2}\left(z^{n+2} + \frac{1}{z^{n+2}}\right) \end{aligned}$$

La propriété est donc vérifiée au rang $n+2$.

Finalement, la propriété est vraie pour tout $n \in \mathbb{N}$.

5) **(1,5 pt)**

$$\begin{aligned} P_n(\cos\theta) &= P_n\left(\frac{1}{2}\left(e^{i\theta}+\frac{1}{e^{i\theta}}\right)\right) \\ &= \frac{1}{2}\left((e^{i\theta})^n + \frac{1}{(e^{i\theta})^n}\right) \qquad \text{par la question précédente} \\ &= \frac{1}{2}\left(e^{in\theta}+e^{-in\theta}\right) \\ &= \cos(n\theta) \end{aligned}$$

6) **(1,5 pt)**
Par la question précédente, P_n vérifie bien la relation voulue. Supposons qu'il existe $Q_n \in \mathbb{C}[X]$ qui vérifie cette même relation. Alors, pour tout $\theta \in \mathbb{R}$, on a :

$$P_n(\cos\theta) - Q_n(\cos\theta) = \cos(n\theta) - \cos(n\theta) = 0$$

Ainsi, $\cos\theta$ est une racine de $P_n - Q_n$. Comme $\cos(\mathbb{R}) = [-1,1]$, cela signifie que pour tout $x \in [-1,1]$, x est une racine de $P_n - Q_n$. Ce polynôme admet donc une infinité de racines. On en conclut que $P_n - Q_n = 0$, donc $P_n = Q_n$.
Il y a donc bien unicité du polynôme vérifiant cette relation.

7) **(1 pt)**
On sait que

$$\begin{aligned} &\cos(n\theta) = 0 \\ \iff\ & n\theta \equiv \frac{\pi}{2}\ [\pi] \end{aligned}$$

- Si $n=0$, il n'y a pas de solution : $\boxed{S=\varnothing}$.
- Si $n\in\mathbb{N}^*$, alors $\cos(n\theta)=0$ équivaut à

$$\theta\equiv\frac{\pi}{2}\left[\frac{\pi}{n}\right]$$

Ainsi,

$$\boxed{S=\left\{\frac{\pi}{2}+\frac{k\pi}{n}\;\middle|\;k\in\mathbb{Z}\right\}}$$

8) **(2 pts)**

Si $n=0$, alors $P_n=1$ donc P_n n'a pas de racine et sa factorisation est $P_n=1$. Dans la suite on considère $n\geq 1$. Par les questions 6) et 7), $\cos\theta$ est racine de P_n si et seulement si $\cos(n\theta)=0$ donc si et seulement si $\theta=\dfrac{\pi}{2n}+\dfrac{k\pi}{n}$ avec $k\in\mathbb{Z}$. On pose

$$\alpha_k=\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)=\cos\left(\frac{(2k+1)\pi}{2n}\right)$$

Ainsi, pour tout $k\in\mathbb{Z}$, le réel α_k est racine de P_n.
(Dans les faits, cela ne signifie pas que P_n admet une infinité de racines, car ces racines ne sont pas distinctes.)
Lorsque k parcourt $[\![0,n-1]\!]$, les réels $\dfrac{(2k+1)\pi}{2n}$ sont distincts et appartiennent à $\left[0,\pi\right]$. Comme la fonction cosinus est bijective de $\left[0,\pi\right]$ sur $\left[-1,1\right]$, on en déduit que les réels $\alpha_0,\cdots,\alpha_{n-1}$ sont deux à deux distincts. On a ainsi trouvé n racines distinctes de P_n. Comme $\deg P_n=n$, on a toutes les racines de P_n.
Enfin, comme P_n a pour coefficient dominant 2^{n-1}, on en conclut que P_n se factorise en :

$$\boxed{P_n=2^{n-1}\prod_{k=0}^{n-1}\left(X-\cos\left(\frac{\pi}{2n}+\frac{k\pi}{n}\right)\right)}$$

9) **(2 pts)**

On sait que

$$\begin{aligned}\cos(n\theta)&=\operatorname{Re}\left((e^{i\theta})^n\right)\\&=\operatorname{Re}\left((\cos\theta+i\sin\theta)^n\right)\\&=\operatorname{Re}\left(\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}(\theta)\times\left(i^k\sin^k\theta\right)\right)\\&=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}(\theta)\times\operatorname{Re}\left(i^k\right)\sin^k\theta\end{aligned}$$

Or, pour tout entier k impair, on a $\operatorname{Re}(i^k)=0$. Par contre si k est pair, on a $\operatorname{Re}(i^k)=\operatorname{Re}\left((-1)^{k/2}\right)=(-1)^{k/2}$.

Ainsi,

$$\begin{aligned}\cos(n\theta)&=\sum_{\substack{k=0\\k\text{ pair}}}^{n}\binom{n}{k}\cos^{n-k}(\theta)\times(-1)^{k/2}\sin^k\theta\\&=\sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}\cos^{n-2p}(\theta)\times(-1)^p\left(\sin^2\theta\right)^p\\&=\sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}\cos^{n-2p}(\theta)\times(-1)^p(1-\cos^2\theta)^p\end{aligned}$$

10) **(1 pt)**

Soit $n\in\mathbb{N}$. On pose

$$Q_n=\sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}X^{n-2p}(X^2-1)^p$$

Par la question précédente, pour tout $\theta\in\mathbb{R}$, on a

$$Q_n(\cos\theta)=\cos(n\theta)=P_n(\cos\theta)$$

En utilisant la question 6), on en déduit que $P_n=Q_n$. D'où le résultat.

11) (a) **(0,5 pt)**

Soit $x\in\left[-1,1\right]$.

$$f_0(x)=\cos(0\arccos x)=\cos 0=\boxed{1}$$
$$f_1(x)=\cos(\arccos x)=\boxed{x}$$

$$\begin{aligned}f_2(x)&=\cos(2\arccos x)\\&=2\cos^2(\arccos x)-1\\&=\boxed{2x^2-1}\end{aligned}$$

(b) **(1 pt)**

Soit $x\in\left[-1,1\right]$. On pose $A=\arccos x$. On a :

$$\begin{aligned}f_{n+1}(x)+f_{n-1}(x)&=\cos((n+1)A)+\cos((n-1)A)\\&=\cos(nA)\cos A-\sin(nA)\sin A+\cos(nA)\cos A+\sin(nA)\sin A\\&=2\cos(nA)\cos A\\&=\boxed{2xf_n(x)}\end{aligned}$$

(Ou encore $f_{n+1}+f_{n-1}=2\mathrm{id}_{\left[-1,1\right]}f_n$)
Ainsi, $f_{n+1}(x)=2xf_n(x)-f_{n-1}(x)$.

(c) **(1 pt)**

Par les deux questions précédentes, on montre par récurrence double immédiate que pour tout $x\in\left[-1,1\right]$ et $n\in\mathbb{N}$, on a $f_n(x)=P_n(x)$. Ainsi, par la question 10),

$$f_n(x)=\sum_{p=0}^{\lfloor n/2\rfloor}\binom{n}{2p}x^{n-2p}(x^2-1)^p$$